Réduction des endomorphismes normaux

Leçons concernées : 151 153 154 155 158 160

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal.

Lemme 1. *Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors F et $F^\perp$ sont stables par u et $u^\star$.*

Démonstration.

Soient $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $F^\perp$. Dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, la matrice M de u s'écrit par blocs : $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right)$. Comme u est normal, u commute avec son adjoint. Matriciellement, cette relation s'écrit :

$$ {}^tMM = M\,{}^tM \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} {}^tAA & {}^tAB \\ {}^tBA & {}^tBB + {}^tDD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\,{}^tA + B\,{}^tB & B\,{}^tD \\ D\,{}^tB & D\,{}^tD \end{pmatrix} $$

En particulier, on a ${}^tBB + {}^tDD = D\,{}^tD$. En prenant la trace, on trouve $\operatorname{tr}({}^tBB) = 0$, donc $B = 0$, et on a $M = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right)$. Ainsi, F et $F^\perp$ sont stables par u et $u^\star$. Enfin, on a de plus $A\,{}^tA = {}^tAA$ et $D\,{}^tD = {}^tDD$, $u|_F$ et $u|_{F^\perp}$ sont normaux. □

Lemme 2. *Supposons que $n = 2$. Alors :*

(i) Si u a une valeur propre réelle, u est diagonalisable dans une base orthonormée.

(ii) Si u n'a pas de valeur propre réelle, la matrice de u dans une base orthonormée est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$.

Démonstration.

(i) Supposons que u admet une valeur propre réelle λ. Soit e_1 un vecteur propre de norme 1. Alors $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est une droite, engendrée par un vecteur e_2 de norme 1, et stable par u. Le vecteur e_2 est donc un vecteur propre de u, et la matrice de u est diagonale dans la base orthonormée (e_1, e_2).

(ii) Supposons que u n'admet pas de valeur propre réelle. Écrivons $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ sa matrice dans une base orthonormée de E. Comme u est normal, on a :

$$ {}^tMM = M\,{}^tM \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} $$

On a en particulier $b^2 = c^2$, donc $b = \pm c$. Si $b = c$, alors M est symétrique et admet des valeurs propres réelles, donc $b = -c$. On en déduit que $d - a = a - d$, donc que $a = d$, d'où le résultat.

□

Théorème 3. *Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que :*

$$ \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix} $$

où $n = r + 2s$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ et $\tau_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour $k \in [\![1, s]\!]$.

Démonstration.

On va raisonner par récurrence sur $n = \dim E$. Le résultat est évident pour $n = 1$, et on vient de traiter le cas $n = 2$. Supposons alors $n \geqslant 3$ et le résultat vrai en dimension inférieur strictement à n.

(i) Supposons que u admet une valeur propre réelle λ, dont on note E_λ l'espace propre associé, qui est stable par u. Alors $E_\lambda^\perp$ est stable par u, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $u|_{E_\lambda^\perp}$, puis obtenir le résultat en concaténant une base de orthonormée de E_λ avec la base obtenue, qui reste bien orthonormée.

(ii) Supposons que u n'admet pas de valeur propre réelle. Soit $Q(X) = X^2 - 2\alpha X + \beta$ un facteur irréductible de χ_u de degré 2 tel que $\alpha^2 < \beta$. Écrivons $Q(x) = (X - \lambda)(X - \overline{\lambda})$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de u. Alors :

$$\det Q(u) = \det(u - \lambda Id_E) \det(u - \overline{\lambda} Id_E) = 0$$

Ainsi, $Q(u)$ est non inversible, et $\operatorname{Ker} Q(u)$ non trivial. Soit $v = u|_{\operatorname{Ker} Q(u)}$. Alors $v^\star v$ est symétrique, donc admet une valeur propre réelle $\mu \in \mathbb{R}$. Soit x un vecteur propre associé, et $F = \operatorname{Vect}(x, u(x))$. On a aussi $u^2(x) = 2\alpha u(x) + \beta x$, ainsi $F = \operatorname{Vect}(u(x), u^2(x))$ est stable par u, et est de dimension 2. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $u|_{F^\perp}$ et le cas $n = 2$ à $u|_F$, ce qui donne le résultat voulu dans la base concaténée.

□

Références

[Gou94] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Algèbre.* Ellipses, 2e édition